بسمه تعالی

ساختمانهای گسسته

۱۳۹۸-۹۹ / ترم ۱

فصل ۱: حساب گزاره ها و گزاره نماها و روشهای اثبات

- e-mail: jafarinejad@shahroodut.ac.ir

- Grading: Midterm exam(25-35%), Final exam (40-50%), assignments + class participation (30-35%).

- Assignments: paper assignments, programming, researches
- Class participation includes participation in lectures (attendance, asking and answering questions, presenting solutions to tutorial questions).

- Note that attendance at every lecture will be taken and constitutes part of the class participation grade.

دورنمای کلی

- فصل ۱: منطق: گزاره ها و گزاره نماها و روشهای اثبات
- فصل ۲: آشنایی با مفهوم اساسی رابطه
- فصل ۳: تابع (...)، اصل لانه کبوتری (کاربرد رابطه)
- فصل ۴: مجموعه های مرتب (ترتیب جزئی، مشبکه، جبربول)
- فصل ۵: روابط بازگشتی
- فصل ۶: نظریه گراف
- فصل ۷: درخت

دورنما

- اثبات چیست
- گزاره ها (گزاره، حساب گزاره ای، ترکیب گزاره ها، جدول درستی، گزاره های هم ارز، گزاره های شرطی ...)
- روشهای اثبات
- حساب گزاره نماها
- اثبات راستی گزاره های سوردار
- استقرای ریاضی

اثبات چیست؟

- تعریف: تصمیم گیری در مورد درستی یا ابطال یک جمله، قضیه، ادعا
- مثال: همه کامپیوترها یک دستگاه ورودی دارند، مکینتاش یک کامپیوتر است ⇐ مکینتاش دستگاه ورودی دارد.
- در یک استدلال، هریک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را فرض یا مقدم، و عبارت آخر را نتیجه می نامیم.
- یک استدلال زمانی معتبر است که فرضهای آن درست باشند و نتیجه هم درست باشد.

گزاره

- گزاره: جمله خبری که یا راست و یا دروغ باشد و نه هردو.
  (قاعده طرد شق ثالث، رد گونه سوم)

- قضیه: گزاره ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان اثبات کرد.

ترکیب گزاره ها

- به منظور تشکیل گزاره های جدید از روی گزاره های قبلی (با استفاده از حروف پیوندی مبنا)

- و، عطف $\wedge$
- یا، فصل $\vee$
- نقیض، نفی یک گزاره $\sim$

- گزاره راستگو: گزاره ای که ارزش درستی گزاره های مبنای تشکیل دهندهٔ آن همواره درست باشد.

گزاره شرطی

- $p \rightarrow q$
- P را مقدم و q را تالی گویند.
- این گزاره زمانی نا درست است که p درست ولی q نادرست باشد.
- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim(p \wedge \sim q)$
- $p \rightarrow q$: گزاره شرطی $\sim q \rightarrow \sim p$: عکس نقیض
- $q \rightarrow p$: عکس $\sim p \rightarrow \sim q$: وارون گزاره

گزاره دو شرطی

$p \leftrightarrow q$ •

هم ارزی گزاره ها

- دو گزاره را بطور منطقی هم ارز گوییم اگر : به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره های مبنای تشکیل دهنده، مقادیر درستی یکسانی داشته باشند.

- (بدین ترتیب می توان گزاره پیچیده را با گزاره هم ارز ساده تر – درصورت وجود- جایگزاری کرد.)

جدول درستی

- روشی برای تجزیه و تحلیل ارزش گزاره ها
- در نوشتن جدول درستی اگر n گزاره مبنا داشته باشیم 2^n ترکیب داریم.

- مراحل ارزیابی جدول:
  - داخلی ترین پرانتز
  - عمل نقیض
  - عمل فصل یا عطف

خواص گزاره ها

- جابجایی $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- شرکت پذیری $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, ...
- قانون دمورگان $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, ...
- خودتوانی $(p \vee p) \equiv p$, $(p \wedge p) \equiv p$
- پخش پذیری $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- همانی $p \wedge T \equiv p$, $p \wedge F \equiv F$, $p \vee T \equiv T$, $p \vee F \equiv p$
- متمم $p \wedge \sim p \equiv F$, $p \vee \sim p \equiv T$
- نقیض دوگانه $\sim \sim p \equiv p$
- جذبی $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- همپوشانی $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q)$

قواعد استنتاج

- روش دوم تجزیه و تحلیل گزاره ها
- دارای دو روش کلی اثبات مستقیم و غیر مستقیم
- قواعد کلی:
  - قیاس استنتاجی(استثنایی) $p, p \rightarrow q \vdash q$
  - قیاس تعدی $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
  - قیاس عکس $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$
  - قیاس فصلی $p \vdash p \vee q$
  - قیاس تخصیصی $p \wedge q \vdash p$
  - قیاس عطفی $p, q \vdash p \wedge q$

اثبات مستقیم

- رسیدن از فرض به نتیجه با قواعد استنتاج و خواص گزاره ها
- مثال: ثابت کنید

- $[(p \to q) \wedge (\sim r \to \sim q) \wedge \sim r] \vdash \sim p$
- $p \to q$ فرض
- $\sim q \to \sim p$ عکس نقیض
- $\sim r \to \sim q$ فرض
- $\sim r \to \sim p$ تعدی
- $\sim r$ فرض
- $\sim p$ استثنایی

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

- برپایه راستگوی $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
- یا برپایه قیاس $p \rightarrow q , \sim q \vdash \sim p$
- رسیدن از نقیض نتیجه به نقیض فرض

- مثال: نشان دهید $p \vee q, \sim q \vee r \vdash p \vee r$

$\sim p \wedge \sim r$	فرض خلف
$\sim p, \sim r$	قیاس تخصیص
$p \vee q$	فرض
$\sim p \rightarrow q$	هم ارز آن
Q	استثنایی ۲و ۴
$\sim q \vee r$	فرض
$q \rightarrow r$	هم ارز آن
R	استثنایی ۵ و ۷
$r \wedge \sim r$	عطف ۲و ۸

گزاره نماها

- عباراتی که اگر مقادیرمتغیر بکار رفته در آنها مشخص شود به گزاره تبدیل میشوند. مانند:
- $X+3 = 7$, $x+y = 10$ و مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2

گزاره نمای ارضاشدنی: اگر یک n تایی، موجب درستی آن، موجود باشد.

گزاره نمای معتبر: اگر تمامی n تایی ها، موجب درستی آن باشند.

دو گزاره نمای هم ارز: اگر به ازای کلیه مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسانی داشته باشند.

سورها

- مرتبط با بحث گزاره نمای ارضا شدنی و معتبر
- در جهان متناهی مثلا n عضوی، سور عمومی مشابه ترکیب عطفی و سور وجودی مطابق ترکیب فصلی عمل میکند
  - $P(x, y)$: x مسن تر از y است.
  - $F(x, y)$: x پدر y است.
  - $\forall x, y\ f(x,y) \rightarrow p(x,y)$
- منطق فاقد سور: منطق گزاره ای-درجه صفر
- منطق گزاره ای+ سورها : منطق درجه ۱-منطق خطی-منطق گزاره نماها

نقیض گزاره های سوردار

- قبل از تصمیم گیری در مورد معتبر بودن یک گزاره سوردار باید دامنه آن را تایین کنیم.
- $\sim[\forall x\ P(x)] \equiv \exists x\ \sim P(x)$
- $\sim [\exists x\ P(x)] \equiv \forall x \sim P(x)$

قواعد استنتاج گزاره نماها

- $\forall x\, P(x) \vdash P(a)$ (جهان لحظه ای UI)
- $\exists x\, P(x) \vdash P(a)$ (وجود لحظه ای EI، a یک عضو <u>ویژه</u> از جهان مورد نظر)

- $P(a) \vdash \exists x\, P(x)$ (تعمیم وجودیEG)
- $P(a) \vdash \forall x\, P(x)$ (تعمیم جهانیUG، a یک عضو <u>دلخواه</u> از جهان مورد بحث)

- قواعد استنتاج گزاره ها اینجا نیز کاربرد دارند

مثال

- ؟ انسانها فانی اند. سقراط انسان است => سقراط فانی است.
- انسانها فانی اند=> یک انسان وجود دارد که می میرد.
- انسانها فانی اند. انسانها (یک شخص) وجود دارد. => یک چیز فانی وجود دارد.

قواعد استنتاج گزاره نماها - سورها در ترکیبات عطفی و فصلی

- $\forall x\, P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$
- $\exists x\, P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

- $\forall x\, P(x) \vee \forall x Q(x) \not\equiv \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x\, P(x) \vee \exists x Q(x) \not\equiv \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$
- مثال با یک گزاره نقض مثلا درمورد male(x) , female(x)
- $\forall x\, (P(X) \vee Q) \equiv \forall x\, P(X) \vee Q$ گزاره Q شامل متغیر x نیست.

مثال

- مثال:
- x:f(x) پرنده است.
- x:G(x) گنجشک است.
- x:P(x) پردارد.
- با داشتن گزاره های :"تمام پرندگان پر دارند" و "تمام گنجشکان پرنده هستند" داریم: "تمام گنجشکان پر دارند."
- $\forall\forall x\ [f(x) \rightarrow p(x)]$
- $x\ [G(x) \rightarrow F(x)]$
- $\forall x\ [G(x) \rightarrow P(x)]$

استقرای ریاضی

حالت خاصی از اثبات گزاره های سوردار، اثبات $\forall n\ P(n)$ در دامنه اعداد طبیعی

برپایه این استدلال:

$$P(1)\ ,\ \forall k\ [P(k) \rightarrow P(k+1)]\ \vdash \forall n\ P(n)$$

مبنا + فرض $\Leftarrow$ حکم

مانند توابع بازگشتی مثل فاکتوریل یا تصاعد حسابی

مثال: نشان دهید مجموع اولین n عدد فرد برابر با n^2 است.

استقرای قوی

- روش چهارم برای تجزیه و تحلیل گزاره ها
- $P(1), .. P(q), \forall k>=q\ [P(1),\ldots,P(k) \rightarrow P(k+1)] \vdash \forall n\ P(n)$

- اگر $P(q)$ .. , $p(1)$ همه درست باشند {مبنا}
- و برای هر $k>=q$ با فرض راست بودن $p(i)$، $1=< I =< k$، {فرض}
- بتوان راست بودن $p(k+1)$ را نتیجه گرفت {مرحله استقرای قوی}
- می گوییم $p(n)$همیشه برقرار است.
- مثال دنباله فیبوناتچی

بازگشت و توابع بازگشتی

فاکتوریل: $F(0) = 1 \qquad F(n+1) = (n+1)\,F(n)$

فیبوناتچی: $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(n+1) = f(n) + f(n-1)$

اثبات خواص در فیبوناتچی با استفاده از استقرای قوی (نه استقرا)، زیرا هر تابع بازگشت به دو تابع قبل خود است.

استفاده در برنامه نویسی منطقی- prolog

```
mother_child(trude, sally).

father_child(tom, sally).
father_child(tom, erica).
father_child(mike, tom).

sibling(X, Y)      :- parent_child(Z, X), parent_child(Z, Y).

parent_child(X, Y) :- father_child(X, Y).
parent_child(X, Y) :- mother_child(X, Y).
```

The result of the following query is given:

```
?- sibling(sally, erica).
Yes
```