بسمه تعالی

ساختمانهای گسسته

۱۳۹۸-۹۹ / ترم ۱

فصل ۲: روابط

تعریف

- یک رابطه دودویی R بین دو مجموعه A,B زیرمجموعه ای از $A\times B$:

- $R\subseteq A\times B,\ (a,b)\in R \Longrightarrow aRb$
- اگر A=B، R یک رابطه در A است.
- مثال: درس و دانشجو

ماتریس روابط

- اگر A، n عضو و B، m عضو داشته باشد:
  - $M_{i,j} = 1$ if $(a_i , b_j) \in R$
  - $M_{i,j} = 0$ if $(a_i , b_j) \notin R$
- ماتریس بولی (ماتریسی با فقط مؤلفه های ۰ و ۱)
- مثال

مثال

- $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow R(A_1) \subseteq R(A_2)$
- $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$
- $R(A_{1\cap} A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$

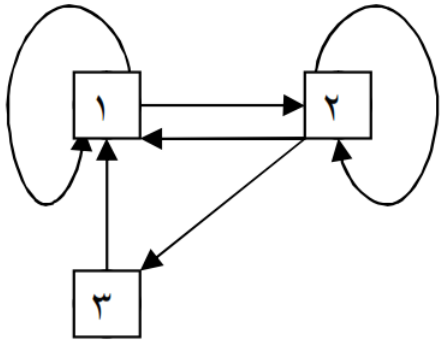
- تعریف: مجموعه نسبی x نسبت به R : R(x)
- $R(x) = \{ y \mid y \in B, xRy\}$

عملیات بولی روی ماتریسها

- $A \vee B = \ldots$
- $A \wedge B = \ldots$
- $A \odot B = C$ حاصلضرب بولی
- c_{ij}
  - 1 if ($a_{ik} = 1$, $b_{kj} = 1$, $\exists k$, $1 \leq k \leq p$)
  - 0 if not

گرافهای سودار (جهت دار)

- نمایش نموداری و گرافیکی یک رابطه مانند R در یک مجموعهٔ متناهی مانند A



- رأس، یال، مسیر
- مدار: مسیری که از رأسی شروع و به خودش خاتمه یابد.
- حلقه: مدار به طول یک
- مسیر به طول ۱ = ؟

- $x\ R^n\ y$ هرگاه مسیری بطول n بین x,y وجود داشته باشد.
- R^∞ مسیری به هر طول
- قضیه: $M_{R2} = M_R \odot M_R$
- مثال
- (استقرا) در مورد M_{Rn}

رابطهٔ دسترس پذیری R^*

- R^{∞}
- $= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

- رابطه دسترس پذیری (R^*) : $x\ R^*\ y$ اگر و تنها اگر $x=y$ یا $x\ R^{\infty}\ y$
- یعنی
- $M(R^*) = M(R^{\infty}) \vee In$

خواص روابط

- بازتابی: $\forall x \in A \Longrightarrow a\ R\ a$

ضد بازتابی: $\forall x \in A \Longrightarrow a\ R\ a$

مثال:

رابطه تساوی

پیشنیازی، فرزندی، بزرگتری اعداد، زیرمجموعه محض

تشخیص بوسیله ماتریس: نگاه به عناصر قطری

تشخیص از روی گراف: حلقه روی رئوس

خواص روابط (۲)

- متقارن: $\forall\ a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$
- ضد متقارن $\forall\ a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$
- مثال
- تساوی، هم رشته ای
- بزرگتری، عاد کردن
- تشخیص ماتریسی: مقایسه عناصر بالامثلثی و پایین مثلثی
- تشخیص گرافی: یالهای دو طرفه بین رئوس

خواص روابط (۳)

- تعدی:
- $\forall a, b, c \in A \quad (a R b, b R c \Rightarrow a R c)$
- مثال:
- عاد کردن، بزرگتری اعداد، نیاکان
- تشخیص ماتریسی: $M_{R2} \leq M_R$
- تشخیص گرافی: اگر مسیر بطول ۲ بین دو رأس => مسیر بطول ۱ نیز باشد

تعمیم تعدی

- قضیه: بطور هندسی، اگر مسیری به هر طول بین دو رأس برقرار باشد، بین آن دو رأس یالی وجود دارد

- $R^n \subseteq R$

هم ارزی

- رابطه R در A را یک رابطه هم ارزی گوییم اگر و تنها اگر بازتابی، متقارن و متعدی باشد.
- هم مدرسه ای ؟
- هم نهشتی؟
- همنهشتی به پیمانه n : $n|(a-b) \Longrightarrow a \equiv b \pmod{n}$

افراز و هم ارزی

- افراز یک مجموعه به چند مجموعه یعنی مجموعه های نهایی با هم اشتراکی نداشته و اجتماع آنها با هم، مجموعه اولیه را بسازد

- به هر یک از مجموعه های تشکیل شده در افراز P، بلوکهای P میگوییم (معادل کلاسهای هم ارزی)

قضیه

- اگر P یک افراز بر روی مجموعه A باشد و رابطهٔ R در A بصورت a R b تعریف شود اگر و تنها اگر a , b در یک بلوک باشند، R یک رابطه هم ارزی در A است.
- مثال: A = { a, b , c, d , f, e} و
- P = { {a, b , c}, {d, e}, {f} } یک افراز از آن باشد، رابطه هم ارزی تعیین شده توسط این افراز چیست؟

قضیه هم ارزی:

- اگر R یک رابطه هم ارزی در A باشد، در این صورت
- $a\ R\ b \Leftrightarrow R(a) = R\ (b)$
- اثبات:
- $R(a) = R(b)$ => بدلیل بازتابی بودن
- $a\ R\ b$ => بدلیل تقارنی و تعدی داشتن
- R یک رابطه هم ارزی در A باشد => مجموعهٔ همهٔ مجموعه های نسبی و مجزای $R(a)$ تشکیل یک افراز روی A را می دهند.

کلاس هم ارزی

اگر R یک رابطه هم ارزی در A باشد، R(a) ها را کلاسهای هم ارزی R گوییم. که گاها با [a] هم نمایش داده میشود.

مثال: کلاسهای هم ارزی (A/R) را در رابطهٔ هم نهشتی که یک رابطهٔ هم ارزی بود با فرض n=3 بدست آورید.

الگوریتم تعیین افراز A /R

1. a عضو ی از A را انتخاب و کلاس هم ارزی آن را بدست آورید

2. b ϵ A که عضو R(a) نباشد را یافته و [b] را بیابید.

3. اگر اجتماع [b] , [a] برابر A نشد، عضوی را که هنوز کلاس آن یافته نشده را بیابید و ..

عملیات روابط

رابطه: مجموعه ای از .... => اجتماع، اشتراک، متمم

معکوس رابطه: $a\ R\ b \rightarrow b\ R^{-1}\ a$

مثال: اعداد و روابط $\leq$ و $\geq$ ، گراف ، ماتریس

خواص متمم و معکوس

1- $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

2- $R \subseteq S \Rightarrow S^{-} \subseteq R^{-}$

3- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$, $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

4- $(R \cup S)^{-} = R^{-} \cap S^{-}$, $(R \cap S)^{-} = R^{-} \cup S^{-}$

۵- R بازتابی $\Leftrightarrow$ R^{-1} بازتابی ، R^{-} ضد بازتابی . (با ماتریس Δ)

۶- R , S بازتابی $\Leftarrow$ $R \cap S , R \cup S$ نیز بازتابی

رابطه متقارن

R متقارن $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ دلیل: ماتریس معکوس رابطه، همان ماتریس تقارن است... $M_{R-1} = (M_R)^T$

قضیه: الف) اگر R متقارن $\Leftarrow R^{-}, R^{-1}$ متقارن

ب) اگر R, S متقارن $\Leftarrow R \cap S, R \cup S$ نیز متقارن.

$(a, b) \in R \cap S \Rightarrow (a, b) \in R, \in S \Rightarrow$ تقارن $\Rightarrow (b, a) \in R, \in S \Rightarrow$ ...

ادامه خواص

1- $(R \cap S)^2 \subseteq R^2 \cap S^2$

۲- R , S متعدی $\Leftarrow R \cap S$ نیز متعدی

۳- R , S هم ارزی $\Leftarrow R \cap S$ نیز هم ارزی

اثبات ۱: مسیر بطول ۲ بین a,b در هر دو رابطه، => در تک تکشان

اثبات ۲: چون وقتی T متعدی است که $T^2 \subseteq T$، پس ...

اثبات ۳: هم ارزی => بازتابی و تقارنی و تعدی => هر سه خاصیت نسبت به اشتراک بسته بود => اشتراک هم هم ارزی است.

بستار

تعریف: بستار یک رابطه R برای یک خصوصیت (مثلا بازتابی، تقارنی ...) افزودن حداقَل تعداد زوج مرتب هاست که R را دارای آن خصوصیت خاص سازد. یعنی پیدا کردن کوچکترین رابطهٔ R_1 که شامل R بوده و ویژگی مورد نظر را دارد.

بستار (ادامه)

بستار بازتابی

$$R_1 = R \cup \Delta$$

بستار متقارن

$$R_1 = R \cup R^{-1}$$

مثال: ... با گراف

بستار متعدی و الگوریتم وارشال

$$R_1 = R^{\infty}$$

ترکیب روابط

اگر R رابطه ای از A به B ، و S رابطه ای ازB به C باشد، SoRرابطه ای از A به C است که:

$aRb, bSc \Leftrightarrow a\ (SoR)\ c$

$SoR\ (A) = S\ (\ R(A))$

خواص ترکیب

1- $M_{SoR} = M_R \odot M_S$

2- $To(SoR) = (ToS)oR$

دلیل: تساوی ۱ و خاصیت شرکت پذیری در ضرب بولی